「令和３年 開成中学校入試問題（算数）」考
– 略解と解説を踏まえて–

一昨日　冗　著

令和３年２月６日（土) の朝日新聞に，開成中学の入学試験（算数）の問題と解答例がのっていました。一見して，とても難しそうだなと思い，解答してみたところ本当に難しいということが分かったね。また，いろいろ問題点があることも分かったね。私は，受験を指導するプロでも，受験産業に関わっている専門家でもない。本当の一般人で，74 歳のじじいです。ただし，大学で数学を教えていたし，大学の入試問題も作成していた。今は，ボランティアで中学生の「数学」勉強の手助けをしている。従って，中学の教科書，高校の教科書の内容は熟知している。

以下，問題を解きながらいろいろ解説していきます。私の略解は小学生が答えるような解答とは違うでしょう。小学生がどんな解答をするかは，よく分かりませんね。そのつもりで，まあ，一読して見て下さい。

注意： 注目してほしい事項・文言は青文字で，答えは 赤文字 or 赤数字で示す。

$\boxed{1}$ (1) 2121 年２月１日が何曜日かを答える問題です。うるう年の定義はきちんとかかれています。2021 年２月１日 (月）からかぞえて，2121 年２月１日が何日目かが分かれば，曜日が分かります。例えば 25 日目ならば，7 で割って余りが 4 なので，木曜日です（余り 1 が月曜，余り 2 が火曜，…，余り 0 が日曜)。答えの概略は，図 1 に示した（図とは言えない落書きかな)。

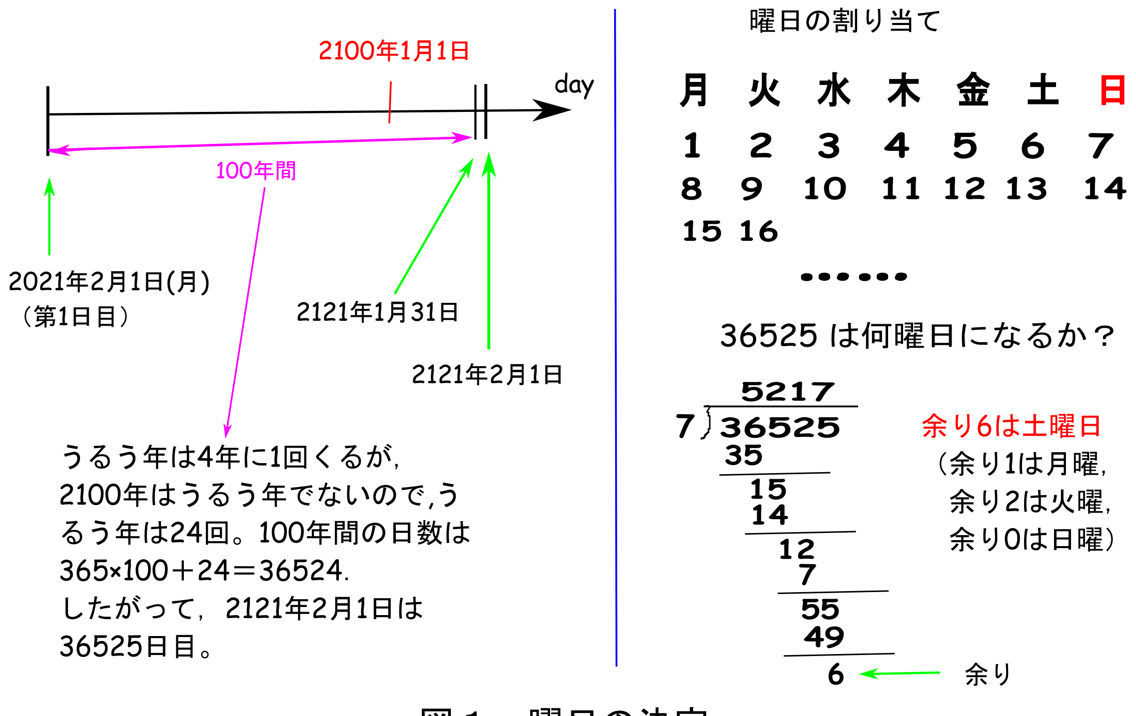


図１．曜日の決定

答えは，土曜日である。この問題は，2121 年２月１日が，2021 年２月１日からかぞえて何日目かが正確に計算できればいいのだが，うるう年が何回あるかの計算が難しいかもね（間違いやすいよ)。

(2) 三角形の頂点を通る何本かの直線によって，その三角形が何個の部分に分けられるかを問う問題。ただし，3 本以上の直線が三角形の内部の 1 点で交わることはないとしている。図 2. の (1) が与えられている。各頂点 A,B,C から，向かい合う辺に，直線をそれぞれ 2 本，2 本，3 本を引いたとき，元の三角形は 24 個の部分に分けられるという事実が述べられている。

三角形の各頂点 A,B,C から向かい合う辺に，直線をそれぞれ 2 本，3 本，100 本引いたとき，元の三角形は何個の部分に分けられるか，というのが問題である。

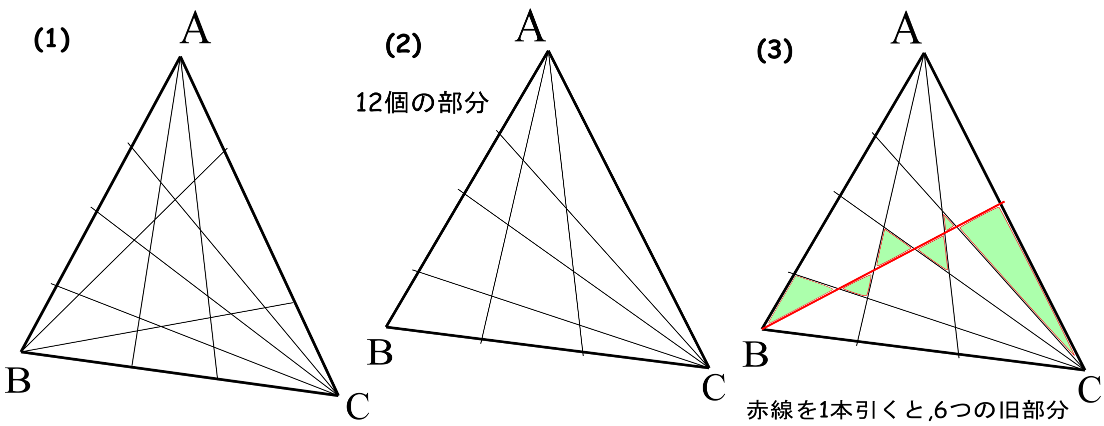


図2. 領域分割

上の図から，引くべき直線の数が変わっても成り立つような一般論，を見つけなければ解けないよね。図 (2) を見ていただきたい。点 C から 3 本，点 A から 2 本，直線を引くと全部で $4 \times 3 = 12$ 個の部分ができます。この 12 個の部分を旧部分と呼ぼう。点 C から 100 本直線が出ていても同様に旧部分の個数は計算できますね。

次に，点 B から 1 本の直線を引きます（図 (3) を見て下さい)。B から出発した赤の直線は，各直線と 1 点で交わるたびに今まであった 1 つの旧部分を 2 つの領域に分けます。赤線が辺 AC まで到達したとき，各直線および辺 AC との交点は 6 個で，分割された旧部分は 6 個です（図 (3) のうす緑の部分が新しくできた部分と考えよ)。したがって，部分は 6 個増えます。

点 B から辺 AC までもう 1 本線を引くと，上と同様に部分が 6 個増えます。したがって部分の総数は

$$4 \times 3 + 6 + 6 = 24(\text{個})$$

です。これで，与えられた問題も同様にして解けます。答えは

$$101 \times 3 + 103 + 103 + 103 = \mathbf{612} \quad (\text{個})$$

です。これも，やさしい問題じゃないね。与えられた図の部分が 24 個であるという理屈が分からないと解けないよね。図 (3) が重要なヒントです。

(3) 面積 6cm^2 の正六角形の中の正三角形（うす緑部分）の面積を求める問題。P,Q,R は各辺の中点。

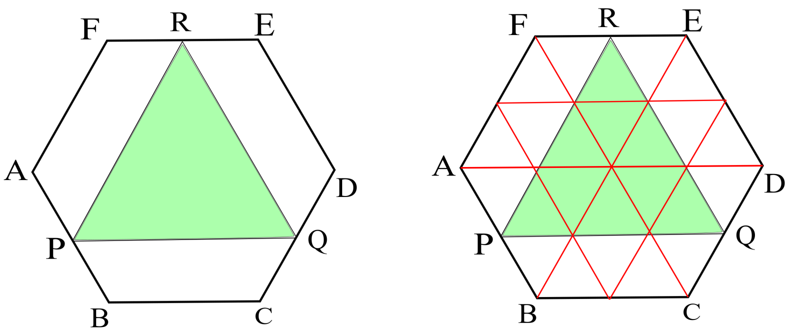


図3. 三角形の面積

右図のように補助線を引くと，全て合同な小さな正三角形が 24 個できます。この正三角形 1 個の面積は $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$ (cm^2) なので，求める面積は $\dfrac{9}{4}$ (cm^2)。

この問題はやさしいですね，皆ができなくちゃいけない問題だね。

(4) $\dfrac{1}{9998}$ を小数で表すとき，小数第 48 位の数，小数第 56 位の数，小数第 96 位の数をそれぞれ求めよという問題。見た瞬間，こんな問題出していいのかよと思うよね。あなたはどう思う。普通に割り算したのが下の図だよ。

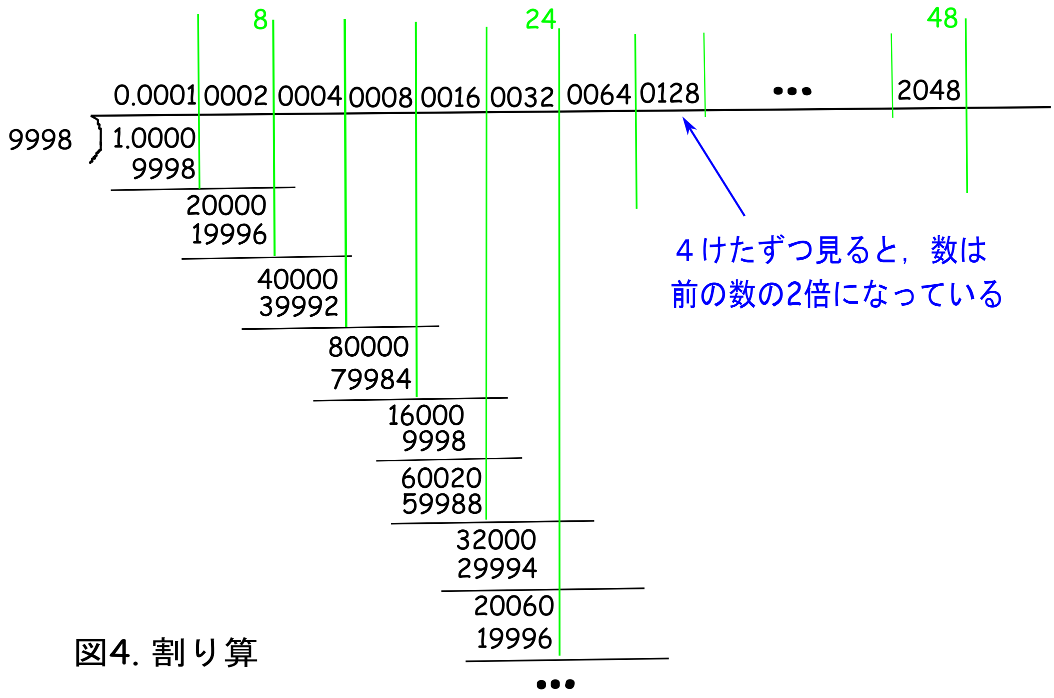


図4. 割り算

この計算で小数点以下 48 けたまで計算するのは，とても大変だよね。試験時間がなくなっちゃうよね。ただ，4 ケタずつ見ると，1,2,4,8, $\cdots$ と数は倍・倍になっていくので，この辺にヒントがありそうだね。48 ケタ目はこの考えでできるかもね。まあ，まともな割り算をする気はしないよね。出題者は，小学生にどうやって計算しろと言いたいのかね。私も小学生の解答の仕方は分からないね（しかし，私の知らないうまい方法があるのかな？）。

私の解き方を書きましょう。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9998} &= \frac{1}{10000-2} = \frac{\frac{1}{10000}}{1-\frac{2}{10000}} = \frac{0.0001}{1-0.0002} \\
&= 0.0001\{1 + 0.0002 + (0.0002)^2 + (0.0002)^3 + \ \cdots \ + (0.0002)^{n-1} + \ \cdots \}
\end{aligned}
$$

（高校の数学 III の範囲，無限等比数列の和）

$$
\begin{aligned}
&= 1\times 10^{-4} + 2\times 10^{-4\times 2} + 2^2 \times 10^{-4\times 3} + \ \cdots \ + 2^{k-1}10^{-4\times k} + \ \cdots \\
&= 1\times 10^{-4} + 2\times 10^{-4\times 2} + 4 \times 10^{-4\times 3} + 8\times 10^{-4\times 4} + \ \cdots \ + 2^{k-1}10^{-4\times k} + \ \cdots
\end{aligned}
$$

この式のたし算を書いたのが，次の図 5 です。上部の緑色の数字が $4\times k$ を表す小数点以下の数字だよ。答えの数字は赤で示した。

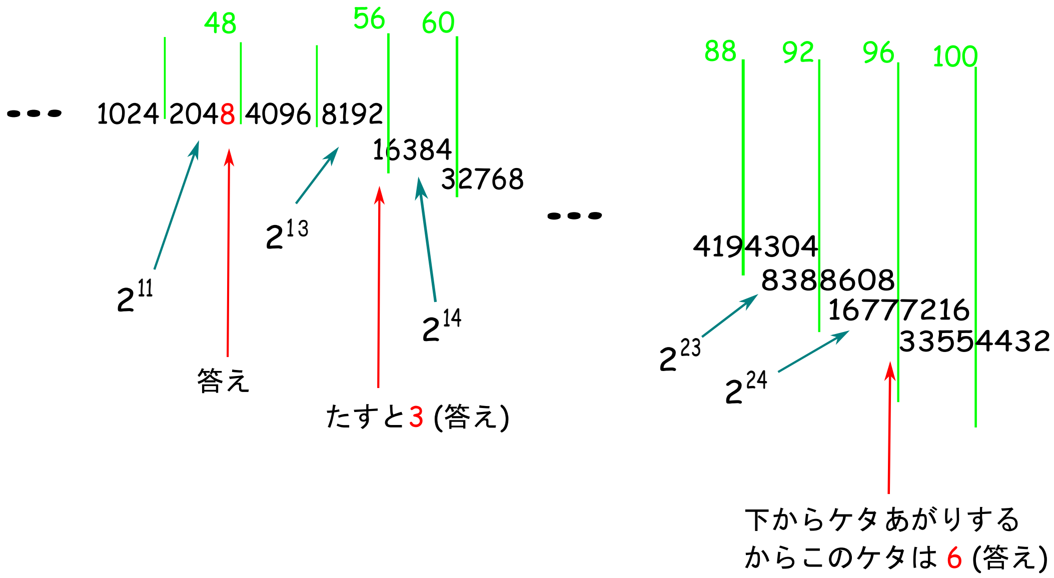


図5. 無限級数の和

私の解法でも相当大変であるということが分かるよね。2 のべきの計算，ケタの位置など注意しても間違えそうだよね。すんなり答えに行きつくとは思えないね。これは，大学入試でも難しい方の問題だね。

2 まず，三角すいの体積は （底面積）×（高さ）÷ 3 により求められると注意しています。三角すい，四角すい，円すいは中学で学ぶ事柄です。三角すい，四角すいという言葉をしらない小学生は多いよ。この問題では，四角すいも出てきますよ。四角すいは 2 つの三角すいの和なので，それを使えと暗に言っているのですかね。

こういう問題を出すというのは，”中学で習う範囲の問題は出しますよ ”と，宣言していることと同じですね。空間図形というのは，慣れていないと高校生や大学生になっても難しいものです。展開図を作って，実際に多面体や円すいなどを組み立て，切ったり張ったりしたことがある学生は，想像力が働くかもね。と言うわけで，空間図形の問題は易しくないということを，頭に置いといて下さい。

下図左のような，1 辺の長さが 6cm の立方体が与えられ，平行な 4 つの辺を 6 等分した点には，記号がつけられています。

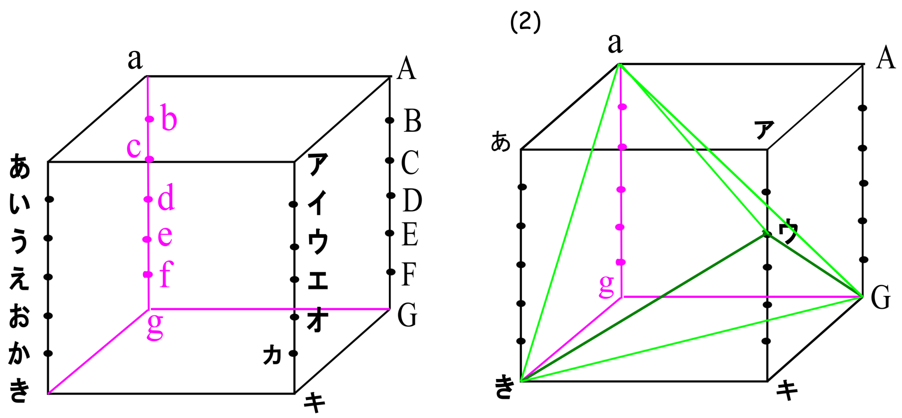


図6. 三角すいの体積

(1) 4 点「き，G，a，g 」を頂点とする三角すいの体積を求める問題。これは，底面が「き，G，g 」の作る三角形で，高さが 6 の三角すいなので，体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36 \ (\mathrm{cm}^3).$$

(2) 4 点「き，ウ，G，a 」を頂点とする三角すい（この三角すいを T と呼びます）の体積を求める問題。上図右の緑色の線で表した三角すい。この三角すいはどの面を底面としても，その面積が求められませんね。また，高さも計算不能です（小学校の範囲では無理ということ)。したがって，三角すい T のまわりにある空間図形の体積を求め，立方体の体積から引けばよい。即ち，立方体から T を取り除いた他の部分を適当に分割して体積を求めるのです。

まず，T の裏側にある三角すい「き，G，g，a 」の底面は △ き Gg 。高さは 6 なので，体積は $\frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36.$ T の下側にある三角すい「き，キ，G，ウ」の体積は, 同様に計算して $\frac{1}{3} \times 18 \times 4 = 24.$

T の上方にある部分を 3 つに分割すると，図 7 のような 1 つの四角すいと 2 つの三角すいになる。

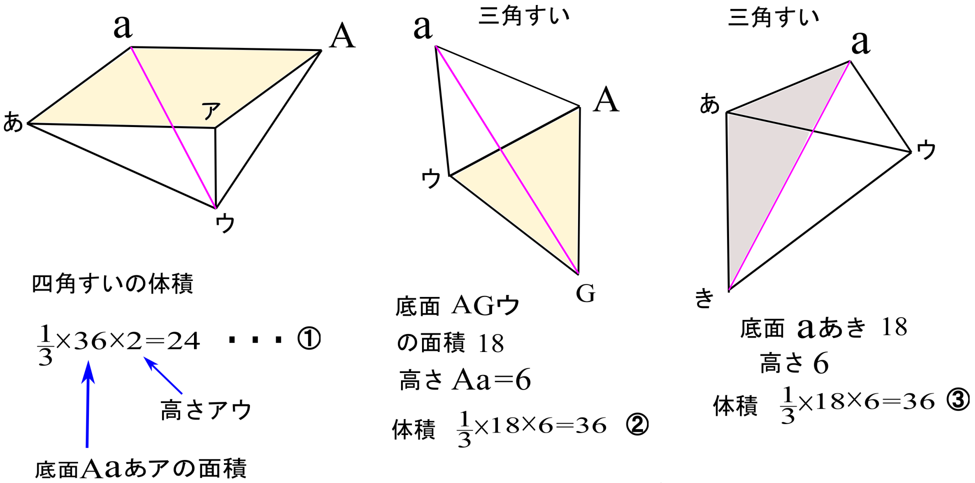


図7. 各部分の体積

図の色をつけた面は，底面と考えよ。以上より，体積は $V = 216-(36+24+24+36+36) = 60 \ (\mathrm{cm}^3)$ である。

(3) 4 点「い，オ，C，g 」を頂点とする三角すい（これを S と呼ぼう）の体積を求める問題。

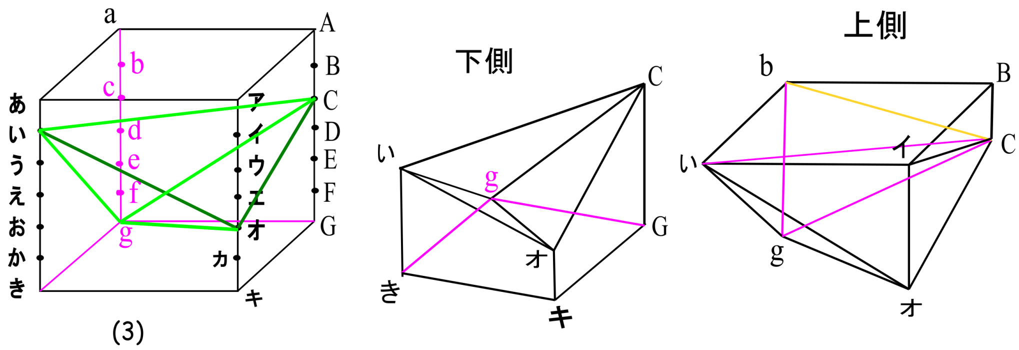


図8. 分割された部分

直接 S の体積は求められないので，上の (2) と同じように S 以外の部分の体積を求め，立方体の体積から引けばよい。上図左に四面体（三角すい）S を緑色で示した。S の下側をまん中に，上側を右にか

いた。ただし，右図は立方体の上部 1cm をカットしてある。

まずSの下側を，1つの四角すい「き，キ，G，g，オ」$\cdots$ ① と 2つの三角すい「オ，G，C，g」$\cdots$ ②，「g，い，き，オ」$\cdots$ ③ に分割します（「$\cdots$」内は，最後の記号が頂点と考えよ）。これらの体積はそれぞれ

$$①: \frac{1}{3}\times 36\times 2 = 24,\quad ②: \frac{1}{3}\times 12\times 6 = 24,\quad ③: \frac{1}{3}\times 15\times 6 = 30$$

次に，Sの上側を1つの直方体，1つの四角すい，2つの三角すいに分けて体積計算します。

直方体「a，あ，ア，A，b，い，イ，B」： $6\times 6\times 1 = 36 \quad \cdots$ ④,

四角すい「b，い，イ，B，C」： $\dfrac{1}{3}\times 36\times 1 = 12 \quad \cdots$ ⑤,

三角すい「イ，オ，C，い」： $\dfrac{1}{3}\times 9\times 6 = 18 \quad \cdots$ ⑥,

三角すい「b，い，g，C」： $\dfrac{1}{3}\times 15\times 6 = 30 \quad \cdots$ ⑦.

結局，求めるSの体積は　$V = 216 - (24+24+30+36+12+18+30) = 42\ (\mathrm{cm}^3)$.

私は，時間をたっぷり使って空間図形の見取図などをかいて考えているので，このような解答が書ける。しかし，限られた試験時間の中で，こんなふうに図形を切り刻んで答えを出すのは至難の技だよね。普通の小学生には (2)，(3) はできないよね（なんせ，中学の問題だからね）。しかも，(2) と (3) と似たような問題が続くのでうんざりしちゃうよ。どちらか1つにした方がいいよね。3つ目は別の問題がいいよ。

$\boxed{\ 3\ }$ 1つのゲームの問題。問題を書きましょう：$\boxed{0}$ と $\boxed{1}$ のいずれかが書かれたカードがたくさんあります。はじめにA君とB君は同じ枚数のカードを手札として横一列に並べています。審判には $\boxed{0}$ のカードが1枚渡されていて，「スコアスペース」にはカードがありません。
次のような「操作」を考えます。

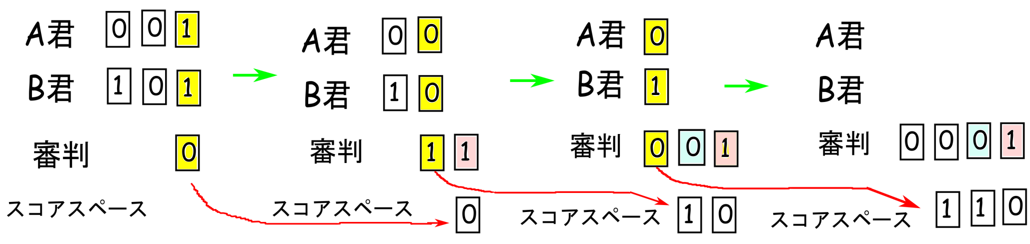
A君とB君はそれぞれ手札の右はしのカード1枚を出し，審判は最後に渡されたカードのうち1枚（はじめは $\boxed{0}$ のカード）を出します。これら合計3枚のカードを次のように移します。

- 3枚とも $\boxed{0}$ の場合は,
  「スコアスペース」に $\boxed{0}$ のカード1枚を置き，審判に $\boxed{0}$ のカード2枚を渡します。
- 2枚が $\boxed{0}$ で1枚が $\boxed{1}$ の場合は,
  「スコアスペース」に $\boxed{1}$ のカード1枚を置き，審判に $\boxed{0}$ のカード2枚を渡します。
- 1枚が $\boxed{0}$ で2枚が $\boxed{1}$ の場合は,
  「スコアスペース」に $\boxed{0}$ のカード1枚を置き，審判に $\boxed{1}$ のカード2枚を渡します。
- 3枚とも $\boxed{1}$ の場合は,
  「スコアスペース」に $\boxed{1}$ のカード1枚を置き，審判に $\boxed{1}$ のカード2枚を渡します。

ただし，「スコアスペース」には古いカードが右に，新しいカードが左になるように置いて行きます。

A君，B君，審判は，A君とB君の手札がなくなるまで上の「操作」を繰り返します。
審判に最後に渡されたカードが $\boxed{1}$ 2枚ならばA君の勝ちです。
審判に最後に渡されたカードが $\boxed{0}$ 2枚ならばB君の勝ちです。
いずれの場合も「スコアスペース」に置かれている $\boxed{1}$ のカードの枚数を，勝者の得点とします。

例えば，下の図のように，はじめの手札が3枚ずつであるとして，A君の手札が $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$ で，B君の手札が $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$ のとき，最終的に「スコアスペース」には $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$ が置かれて，審判に最後に渡されたカードが $\boxed{0}$ 2枚なので，B君の勝ちで得点は2点になります。



注意：黄色のカードは，次の「操作」で移すカードです。

図9. 例題

問に入る前に，このゲームについて少し考えて下さい。$\boxed{0}$ あるいは $\boxed{1}$ の何枚かのカードを横一列に並べたものは，順列（高校の数学 A の範囲）と呼ばれています。順列のカードの枚数はケタと呼ぶことにします。例えば，0 または 1 からなる 4 ケタの順列は，全部で $2^4 = 16$ 個あります。6 ケタならば，64 個です。この位のことは，習ってなくても分かりますかね。

さて，問題文の説明と例だけで，このゲームがすべて分かったでしょうか？　ゲームは面白いと思いますか，やってみたいですか？　A 君の順列を 1 つ固定して，B 君の順列を 1 つもってきてゲームをしたとき，スコアスペースに 1 つの順列が出来上がります（これを P_1 とします)。別の順列を B 君のところにおいてゲームをすれば，またスコアスペースに 1 つの順列（これを P_2 とします）ができます。このとき，$P_1 \neq P_2$ でしょうか，$P_1 = P_2$ となることはないのでしょうか？　問題作成者は，このこと（B 君の順列とスコアスペースの順列は 1 対 1 に対応しているか）について何も述べていません。これは問題作成者のミスです。もし，1 対 1 対応が言えないと，問 (4)，(5) では答えはいくつでもできてしまいます。問 (3) では，答えは 1 つしかないと断っているのでＯＫです。このゲームでの，「B 君の順列とできあがったスコアスペースの順列は，1 対 1 に対応している」ということは証明済みですか？　このことは，少なくとも問題を解く側 (受験者）には，知らせておかないといけませんね。ともあれ，1 対 1 であると仮定して，とにかく略解を書きましょう。

(1),(2) は，A 君と B 君の手札が与えられていて，スコアスペースにできる最後のカードを求める問題です。例題を真似してやれば答えに行きつきます（図 10 参照，答えは右下のもの)。

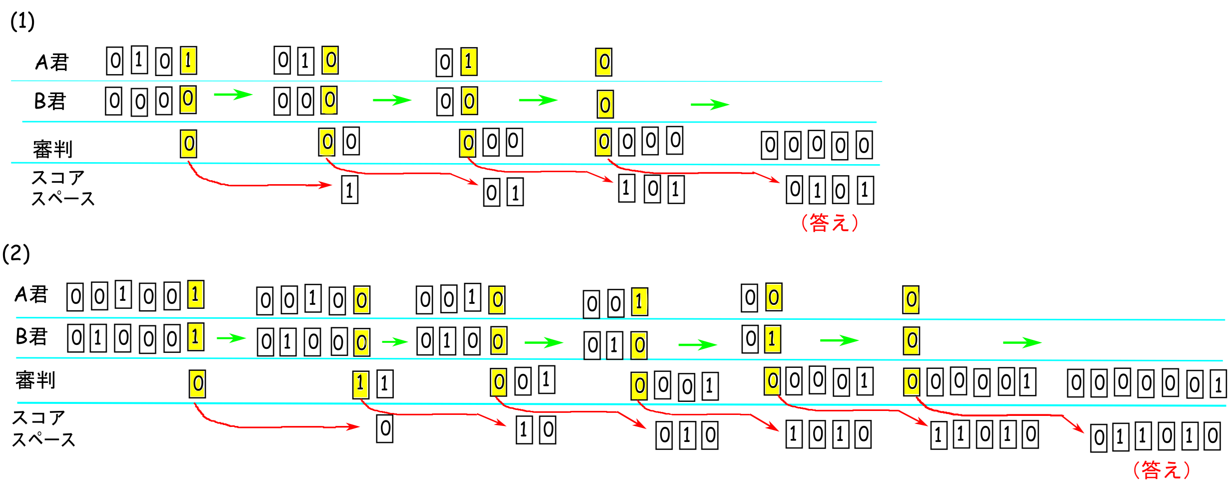


図10.　解答の過程

(3) はじめの手札が 6 枚ずつで，A 君の手札が $\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$ のとき，B 君が勝ちで得点が 6 点になるには，B 君はどのような手札であれば良いでしょうか（答えは一通りしかありません)。という問題です。

B 君が 6 点で勝つので，スコアスペースの最後のカードは $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ で，審判の最後のカードの上位 2 ケタは $\boxed{0}\boxed{0}$ です。このことをふまえて，スコアスペースのカードがすべて 1 になるように B 君のカードを決めていくと，下の図 11 のようになります。答えは赤で示した順列です。

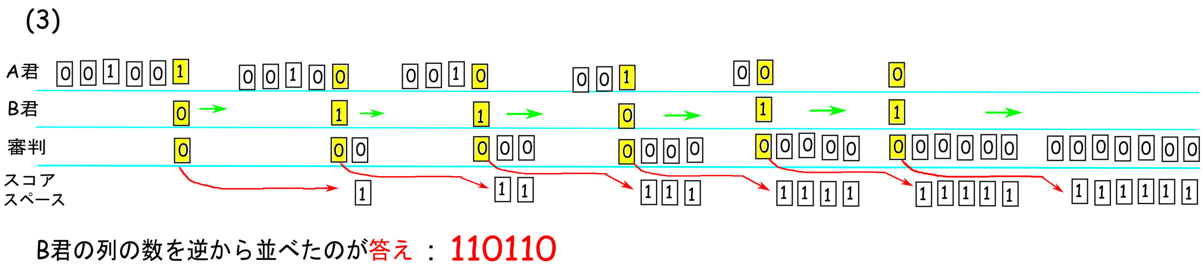


図11.　B君の末尾のケタから決める

(4) A 君の手札は (3) と同じとき，B 君が勝ちで得点が 1 点になるには，B 君はどのような手札であれば良いでしょうか。すべて答えなさい。ただし，解答らんはすべて使うとは限りません。という問題です。

B 君が 1 点で勝つので，考えられるスコアスペースの最後のカードは，次の 6 通りです。

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$, $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$, $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$, $\cdots$, $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$. $\cdots$ ①

① の最初のカード $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ になるように，B 君のカードを作成したのが下の図 12 です。答えは赤で示した順列です。

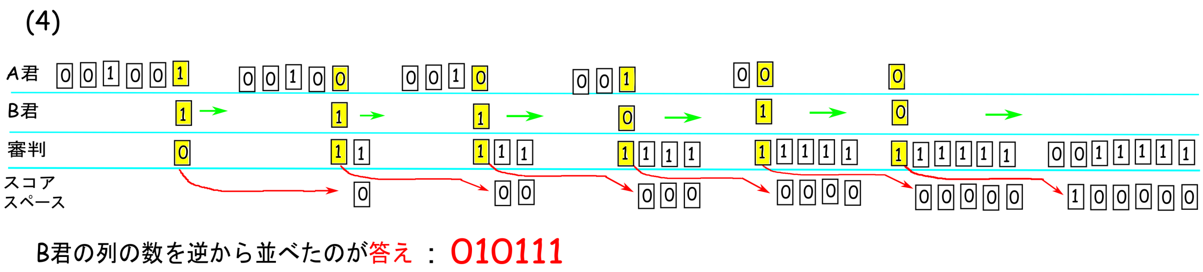


図12.　B君が1点で勝つ

① の 2 番目のカード $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ になるように，B 君のカードを作成すると，$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ になる。このとき，審判の最初の 2 ケタは $\boxed{0}\boxed{0}$ なので，これも答えである。

① の残りの 4 つのカードに対しては，審判の最初の 2 ケタが $\boxed{1}\boxed{1}$ になるので，答えではない（読者はこれを確かめて見て下さい，1 時間くらいはかかりますよ）。

(5) A 君の手札は (3) と同じとき，B 君が勝ちで得点が 2 点になるような B 君の手札は何通りありますか。という問題です。

まず，スコアスペースの最後の順列で勝ち点が 2 になるものがいくつあるかというと，

$_6C_2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ 個ある（高校の順列・組み合わせの範囲）。この 15 個の中で，B 君の負けになるものがいくつあるか調べなければならない。ものすごく大変な作業であるということがわかるよね。すなわち，馬鹿げた問題ですね。それとも，小学生にわかる簡単な方法があるんですか？(出題者の方，必ず教えてね)。というわけで，大変難しい問題です。私は，コンピューターを使って答えを出しました（プログラムを組んで，という意味)。

B 君の得点が 2 点で，負けの場合が 3 通りある。これを下に記す：

B 君のカード $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$,　スコアスペース $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$,

B 君のカード $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$,　スコアスペース $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}$, B 君のカード　$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$，　スコアスペース　$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$.

答えは，$15 - 3 = 12$（通り）である。

ゲームの問題を試験に出すのなら，世の中でよく知られているゲームで，その性質などが完全に分かっているゲームを使うべきです。例えば，サイコロを用いたゲームとかトランプのポーカーゲームとかです。即ち，問題を解く側もそのゲームがある程度分かっていることが大切なのです。さらに，やってみたいゲーム，楽しいゲームがいいですね。

ここで出されたゲームは，世の中で広く認知されていないし，性質もよく分かりませんね。そして，ゲームのルールもけっこう複雑ですね。だから，解く側はゲームの性質がよく分からないままに，問題を解かざるを得ない。B 君のカードとスコアスペースの最後のカードが，1 対 1 に対応しているのかいないのか，なんて考えてる暇ないよね。考えたとしてもどうにも分からないよね。だから，いい問題ではないのです。

［まとめ］ 開成中学の入試問題を解いたのは初めてですが，なんでこんな難しい問題を出すのだろうというのが第一印象です。制限時間内で解答したとき，私は 40 点（100 点満点で）位しかとれませんでした。私は三流の数学者ですが,「この問題は今年の大学入試共通テストより難しいですよ」ということを確信をもって言うことができます。嘘だと思うなら，この問題を東大生にやらせてみて下さい。5 割解ける学生はほとんどいないと思います。

このような試験を受験する小学生は，かわいそうですね。普通の小学生は手も足も出ませんね。受験生に対するアカデミックハラスメントまたはパワハラと言われてもおかしくないよね。塾や予備校で特殊な訓練を受けた生徒ならば，この試験に対応できるかもしれませんが....。私は，自分の子供や孫達には，こんな難しい入試をする中学校は受験するなと言いますね。しかし，一般のご父兄の方々には，入試の難易度のことは良く分かりませんよね。この異常な状況も分かりませんよね。多くの方が，この一文を読んでくれることを願っています。

中学入試は，文科省が定めた教科内容をはみ出さないところで作成して欲しいですね。その範囲でも，良い問題，やや難しい問題，数学的センスのある考えさせる問題などは作ることができますよ。範囲をはみ出して，難しくすることはいいことではありません。私は，今後，他の私立中学の問題も解いてみようと思っています。それらの解説は，まとまり次第ホームページで報告しましょう。乞うご期待！

（おとといのジョー；ペンネーム，3 月 10 日 ’21　記）